

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030417

正多面體截角截半

學校名稱：臺中市立居仁國民中學

作者： 國一 郭恩業 國一 王蕎茵 國一 林緯哲	指導老師： 楊士弘
---	------------------

關鍵詞：正多面體、阿基米德多面體、截角、截半

正多面體截角截半

摘要

此研究探討正多面體(柏拉圖立體)再進行截角(truncation)和截半(rectified)的情況下，觀察其所形成的截角截半後的圖形變化，即其中一種阿基米德多面體的生成方式，並利用 Geogebra 電腦軟體模擬繪製，藉此來協助我們觀察並計算截角截半後的圖形周長及表面積，並分析其前後圖形比例之關係。

壹、研究動機

在國小時我們學習過多面體在進行表面積計算時，是將其一面之表面積算出後再乘以其表面數而得；在計算周長時，則是把一邊長乘上所有的邊長數而得；在體積方面則沒有演算過和推導其公式。

在課堂上老師拿出了正多面體讓我們探討其圖形組成，並且詢問我們如果五個正多面體在進行截角後會變成什麼樣的圖形呢？這也引發了我們對於多面體進行截角後的立體圖形產生興趣，上網找尋工具協助我們探討在正多面體上進行截角後的圖形，讓我們想要繼續探索：當對正多面體進行各角的截角後：1. 截角下來的「角」會是怎樣的形狀及其具有甚麼性質？2. 截角截半後「留下來的圖形」的周長、表面積會有怎麼樣的變化？在此研究報告中，我們將研究對象設定在正多面體的邊長為 1，並且利用 Geogebra 電腦軟體來繪製截角和截半圖形，以協助我們觀察和完成計算截角截半後之周長和表面積。

貳、研究目的

- 一、分析、理解正多面體的各種截角截半後的變化和圖形。
- 二、運用 Geogebra 電腦軟體觀察正多面體進行截角截半後的圖形變化。
- 三、算出正多面體採截角截半時所形成的各種截角形狀及其分析前後周長及表面積之改變。

參、研究器材與設備

電腦、GeoGebra 軟體、紙、筆

肆、研究過程

一、基本定義：

(一)、正多面體：

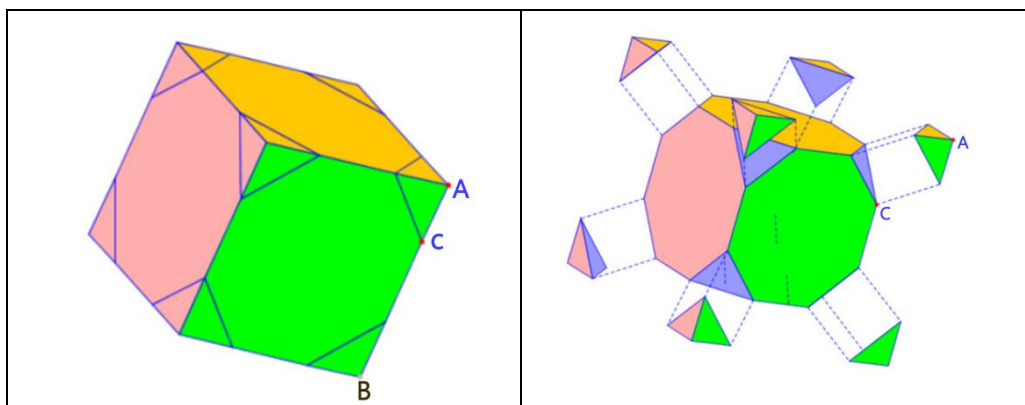
本研究中進行截角所使用的正多面體，為各面都是全等的正多邊形且每一個頂點所接的面數都是一樣的**凸多面體**，即柏拉圖立體(Platonic Solids)，符合這種特性的立體總共有 5 種，分別為正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體。在本研究中，將各正多面體的邊長都定義為 1。

(二)、截角限制條件：

本研究中所指的截角，指的是將多面體各頂點角截去全等的角錐，在此將截角後得到的多面體稱為截角體。圖一中以正方體做為示意圖，C 點為多面體 $\overline{AB}$ 邊上的一點， $\overline{AC}$

表示截去的角錐稜線長，因此 $\overline{AC}$ 長度不得超過 $\overline{AB}$ 的一半。令 $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ ，稱為截角比，

則 $r \in [0, \frac{1}{2}]$ 。當 $r=0$ 時，截角體就是多面體本身(以圖一為例，即正方體本身)；當 $r=\frac{1}{2}$ 時，稱為截半(rectified)截角體。如圖一所示，移動 C 點可改變截角比。在此研究中，我們定義各正多面體的邊長都為 1，並將 r 限縮在 $\frac{1}{3}$ 及 $\frac{1}{2}$ ，即 $\overline{AC}$ = 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{3}$ 及 $\frac{1}{2}$ 時，推導各正多面體截去截角後的截角體周長及表面積公式。以圖一的右圖為例，當正六面體的八個頂點都截去稜線長為 $\frac{1}{3}$ 的角錐後，中間剩下來的十四面體即為截角體。



圖一 正六面體截角示意圖(本表由作者一整理與製作)

二、進行步驟：

(一)、利用 GeoGebra 軟體中可對正多面體操作截角的工具，協助我們進行觀察，將正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體，都以前述的條件得到截面，輔

助我們計算正多面體邊長為 1，而截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{3}$ 及 $\frac{1}{2}$ 時：(1)截去的角錐的總周長及總表面積 (2)截角後的截角體的周長及表面積。

三、 探討過程：

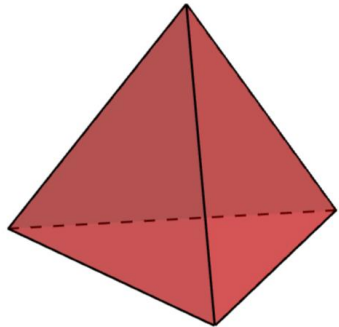
在各正多面體各頂點角截去全等的角錐，探討截下的角錐及截角體的周長及表面積：在這個部分按照基本定義中所列的截角限制條件，以 GeoGebra 軟體輔助我們觀察截角後的形狀，並計算出周長及面積，以下以正四面體為例，將圖示及計算過程列於表一中：

●正四面體

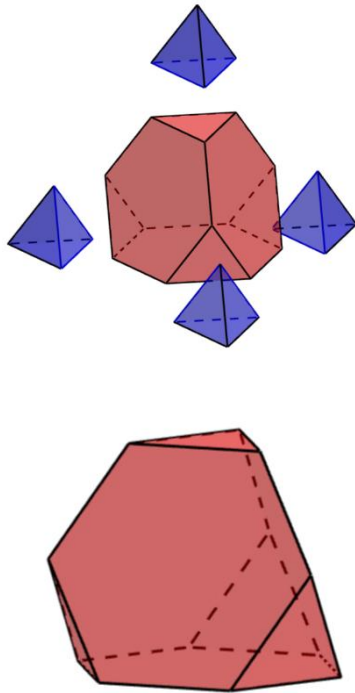
1. 繪出邊長為 1 的正四面體，當 $r=0$ 時，此時還未有截下的角錐，因此截去的角錐的總周長及總表面積都為 0；此時截角體即四面體本身，則截角體周長=6，截角體表面積為 $\sqrt{3}$ 。
2. 以 $r=\frac{1}{3}$ 在 4 個頂點截去全等的角錐，此時截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{3}$ 。此時被截下的 4 個全等的角錐的總周長為 8，且總表面積為 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ 。截角體的總周長為 6，而總表面積為 $\frac{7\sqrt{3}}{9}$ 。
3. 以 $r=\frac{1}{2}$ 在 4 個頂點截去全等的角錐，此時截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{2}$ 。此時被截下的 4 個全等的角錐的總周長為 12，且總表面積為 $\sqrt{3}$ 。此時的截角體為截半(rectified)截角體，其總周長為 6，總表面積為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

接著我們將正六面體、正八面體、正十二面體及正二十面體截角時的圖示及計算過程依序列於表一~表五中：

表一 正四面體截去的角錐及截角體的總周長及總表面積計算(本表跨頁呈現)

1. 截角前($r=0$)	
	截去的角錐的總周長 = 0 截去的角錐的總表面積 = 0 截角體(正四面體本身)周長= 6 截角體表面積= 4 個正 $\triangle = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \times 4 = \sqrt{3}$

2. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{3}$ (即 $r=\frac{1}{3}$)



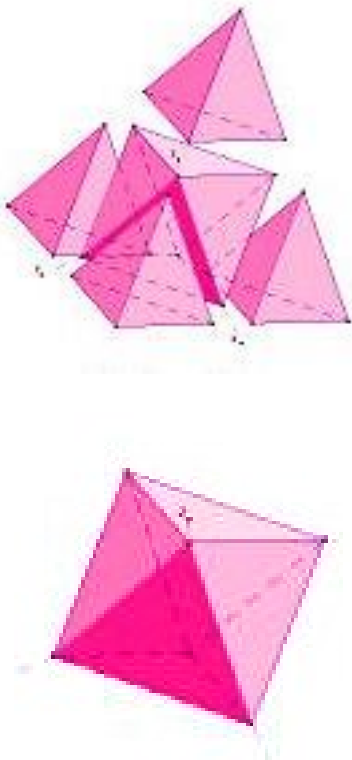
截去的角錐(藍色部分)的總周長=4 個正三角錐的總周長= $4 \times 6 \times \frac{1}{3} = 8$

截去的角錐的總表面積=16 個正△
 $= 16 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times r^2$
 $= 16 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 16\sqrt{3}r^2$

截角體(紅色部分)周長= $18 \times \frac{1}{3} = 6$

截角體表面積=4 個正△+4 個正六邊形
 $= 28$ 個正 △
 $= 28 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$
 $= 28 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9} = \frac{7\sqrt{3}}{9}$

3. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{2}$ (即 $r=\frac{1}{2}$)



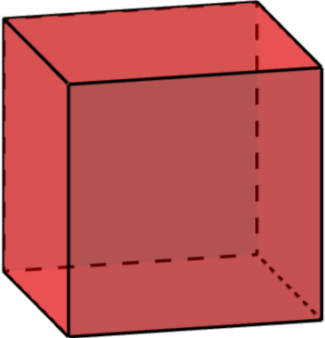
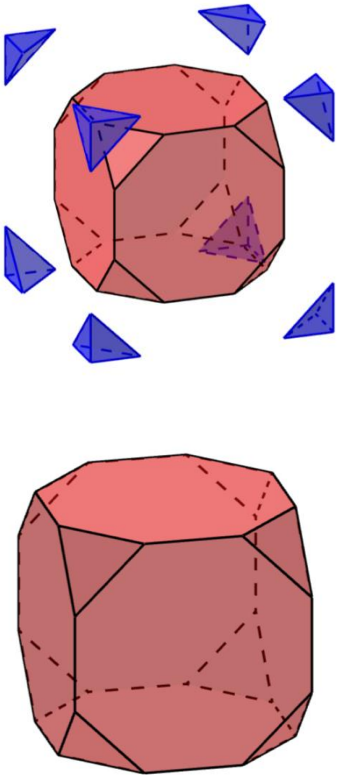
截去的角錐(藍色部分)的總周長= 4 個正三角錐的總周長= $4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 12$

截去的角錐的總表面積= 16 個正△=
 $16 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$
 $= 16 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4} = \sqrt{3}$

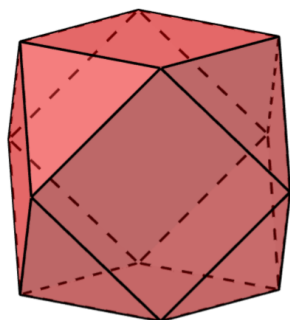
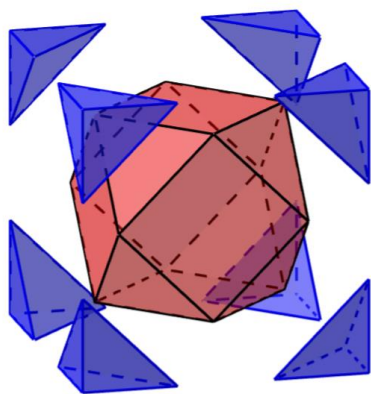
截角體(紅色部分)周長= 12 邊 = $12 \times \frac{1}{2}$
 $= 6$

截角體表面積= 8 個正 △= $8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

表二 正六面體截去的角錐及截角體的總周長及總表面積計算(本表跨頁呈現)

1. 截角前($r=0$) 	截去的角錐的總周長 = 0 截去的角錐的總表面積 = 0 截角體(正六面體本身)周長 = 12 截角體表面積 = 6個正方形 = $6 \times 1 \times 1$ $= 6$
2. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{3}$ (即 $r=\frac{1}{3}$) 	截去的角錐(藍色部分)的總周長 = 8個四面體的總周長 = $8 \times (3 \text{ 個側邊長} + 3 \text{ 個底邊長})$ $= 8 \times \left(3 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{\sqrt{2}}{3} \right) = 8 + 8\sqrt{2}$ 截去的角錐的總表面積 $= 8 \times \left[\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \right) \times \frac{1}{2} \times 3 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2 \right] = \frac{12+4\sqrt{3}}{9}$ 截角體(紅色部分)周長 = 8個 $\triangle + 12 \times \frac{1}{3}$ $= 8 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{3} + 4 = 4 + 8\sqrt{2}$ 截角體表面積 = 8個 $\triangle + 6$ 個八邊形 $= 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2 + 6 \times \left[\frac{1}{3} \times 1 + \frac{\left(\frac{1}{3} + 1 \right) \times \frac{1}{3}}{2} \times 2 \right]$ $= \frac{4\sqrt{3}}{9} + 2 + \frac{8}{3} = \frac{42+4\sqrt{3}}{9}$

3. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{2}$ (即 $r = \frac{1}{2}$)



截去的角錐(藍色部分)的總周長=

$$8 \text{ 個正四面體} = 8 \times \left[\frac{1}{2} \times 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 3 \right]$$

$$= 8 \times \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) = 12 + 12\sqrt{2}$$

$$= 12 + 12\sqrt{2}$$

截去的角錐的總表面積=8×(3 個等腰三角形 + 1 個正三角形)

$$= 8 \times \left[\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]$$

$$= 8 \times \left(\frac{3}{8} + \frac{2\sqrt{3}}{16} \right) = 3 + \sqrt{3}$$

截角體(紅色部分)周長=6 個正方形= 24 邊

$$= 24 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

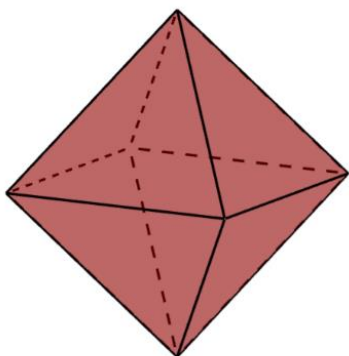
截角體表面積=6 個正方形+8 個正 Δ

$$= 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

$$= 3 + 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{4} = 3 + \sqrt{3}$$

表三 正八面體截去的角錐及截角體的總周長及總表面積計算(本表跨頁呈現)

1. 截角前($r=0$)



截去的角錐的總周長 = 0

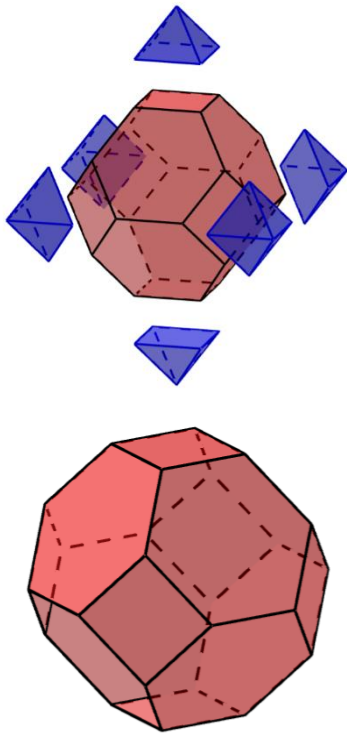
截去的角錐的總表面積 = 0

截角體(正八面體本身)周長= 12

$$\text{截角體表面積} = 8 \times \text{正 } \Delta = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2$$

$$= 2\sqrt{3}$$

2. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{3}$ (即 $r = \frac{1}{3}$)



截去的角錐(藍色部分)的總周長 = 64 個邊

$$= 64 \times \frac{1}{3} = \frac{64}{3}$$

截去的角錐的總表面積 = $8 \times (1 \times \text{正方形} + 4 \times \text{正}\Delta)$

$$= 8 \times \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right]$$

$$= 8 \times \left[\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9} \right] = \frac{8 + 8\sqrt{3}}{9}$$

截角體(紅色部分)周長 = 6 正方形 + 4 + 4 +

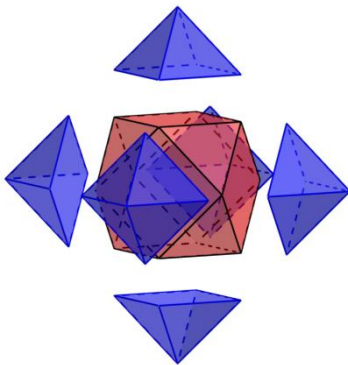
$$4 = 6 \times 4 + 12 = 36 \text{ 個邊} = 36 \times \frac{1}{3} = 12$$

截角體表面積 = 8 正方形 + 8 正六邊形

$$= 8 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \left[8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{8}{9} + \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{8 + 12\sqrt{3}}{9}$$

3. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{2}$ (即 $r = \frac{1}{2}$)



截去的角錐(藍色部分)的總周長

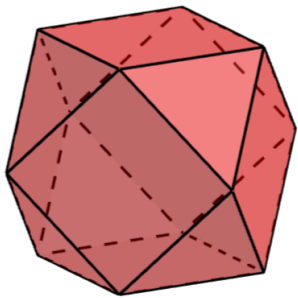
$$= 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 24$$

截去的角錐的總表面積

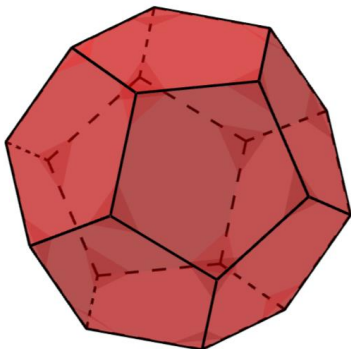
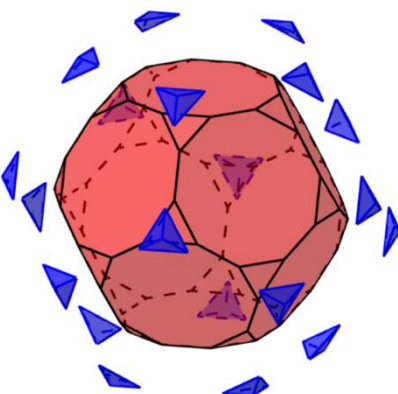
= 6 正方形 + 24 正三角形

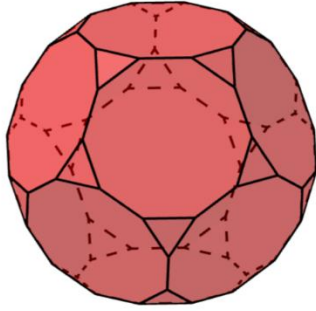
$$= 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 + \frac{3}{2} = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}$$

	截角體(紅色部分)周長= 6×8 邊 $= 48 \text{ 邊} = 48 \times \frac{1}{2} = 24$ 截角體表面積= $6[4 \text{ 正三角形} + 1 \text{ 正方形}]$ $= 6 \left[4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right]$ $= 6 \left[4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] = \frac{3\sqrt{3} + 3}{2}$
---	---

表四 正十二面體截去的角錐及截角體的總周長及總表面積計算(本表跨頁呈現)

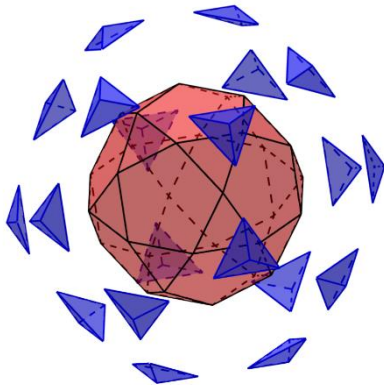
1. 截角前($r=0$)	
	截去的角錐的總周長 = 0 截去的角錐的總表面積 = 0 截角體(正十二面體本身)周長 $= 30 \text{ 邊} = 30 \times 1 = 30$ 截角體表面積= $12 \times \text{正五邊形}$ $= 12 \times \frac{5 \tan 54^\circ}{4}$ $= 15 \tan 54^\circ$
2. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{3}$ (即 $r=\frac{1}{3}$)	
	截去的角錐(藍色部分)的總周長= 20 個角 $= 20 \times 6 \times \frac{1}{3} = 20 \times 2 = 40$ 截去的角錐的總表面積= 20(正四面體) $= 20 \times \left[4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right]$ $= 20 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9} = \frac{20\sqrt{3}}{9}$



$$\text{截角體(紅色部分)周長} = 90 \times \frac{1}{3} = 30$$

$$\begin{aligned} \text{截角體表面積} &= 20 \text{ 正 } \triangle + 12 \text{ 正十邊形面積} \\ &= \left[20 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] + \left\{ 12 \times \left[\frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{3} \right)^2 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \right] \right\} \\ &= \frac{5\sqrt{3} + 30\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{9} \end{aligned}$$

3. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{2}$ (即 $r = \frac{1}{2}$)



截去的角錐(藍色部分)的總周長

$$\begin{aligned} &= 20 \times \left(3 \times \frac{1+\sqrt{5}}{4} + 3 \times \frac{1}{2} \right) \\ &= 60 \times \frac{1+\sqrt{5}}{4} + 60 \times \frac{1}{2} \\ &= 45 + 15\sqrt{5} = 45 + 15\sqrt{5} \end{aligned}$$

截去的角錐的總表面積

$$\begin{aligned} &= 20 \times \left(3 \text{ 個側邊正 } \triangle \times \frac{1+\sqrt{5}}{4} + 1 \text{ 個底邊正 } \triangle \right) \\ &= 20 \left[3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^2 \right] \\ &= 20 \left[3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{3+\sqrt{5}}{8} \right] \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{4} + \frac{15\sqrt{3} + 5\sqrt{15}}{8} = \frac{45\sqrt{3} + 5\sqrt{15}}{8} \end{aligned}$$

截角體(紅色部分)周長=60×邊長

$$= 60 \times \frac{1+\sqrt{5}}{4} = (15 + 15\sqrt{5})$$

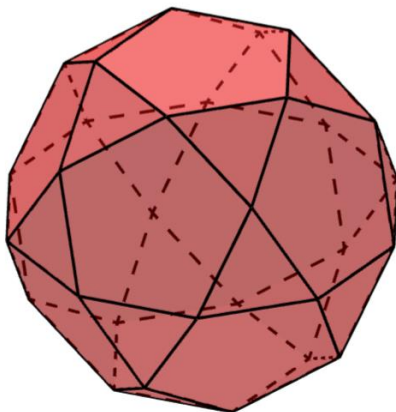
$$\text{截角體表面積} = 12 \times \frac{5 \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^2 \tan 54^\circ}{4} +$$

$$20 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^2$$

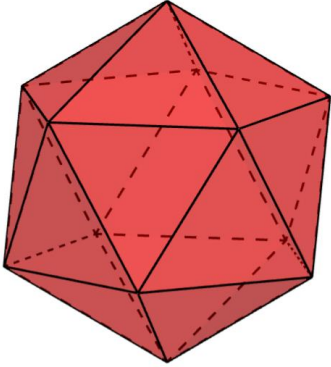
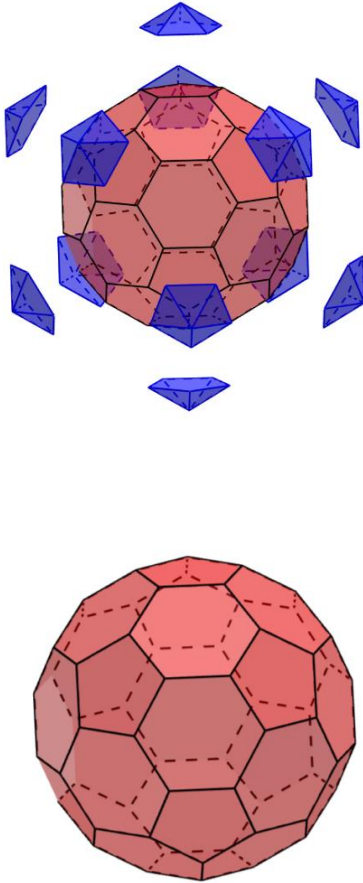
$$= 15 \times \frac{6+2\sqrt{5}}{16} \times \tan 54^\circ + 5\sqrt{3} \times \frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$= \frac{(90+30\sqrt{5}) \tan 54^\circ + 30\sqrt{3} + 10\sqrt{15}}{16}$$

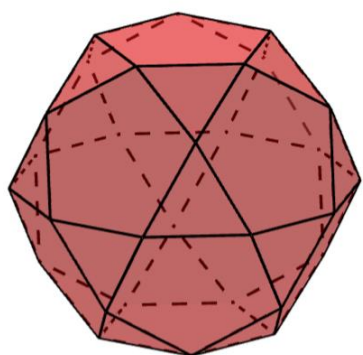
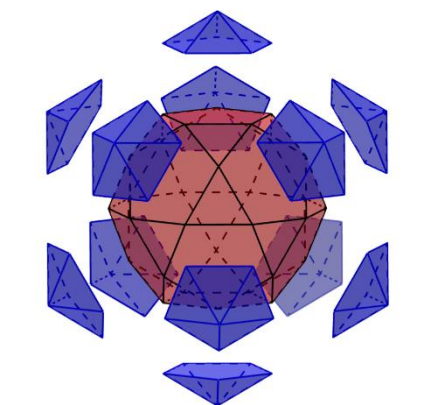
$$= \frac{(15+5\sqrt{5})(3\tan 54^\circ + \sqrt{3})}{8}$$



表五 正二十面體截去的角錐及截角體的總周長及總表面積計算(本表跨頁呈現)

1. 截角前($r=0$) 	截去的角錐的總周長 = 0 截去的角錐的總表面積 = 0 截角體(正二十面體本身)周長= 30 截角體表面積=20 個正$\triangle = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$ $= 5\sqrt{3}$
2. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{3}$ (即 $r=\frac{1}{3}$) 	截去的角錐(藍色部分)的總周長 $= 12 \times (10 \times \frac{1}{3}) = 40$ 截去的角錐的總表面積 $= 12 \times (5 \text{ 個正 } \triangle + 1 \text{ 個正五邊形})$ $= 12 \times \left[5 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \tan 54^\circ}{4} \right]$ $= 12 \times \left[\frac{5\sqrt{3}}{36} + \frac{45 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \tan 54^\circ}{36} \right]$ $= \frac{5\sqrt{3} + 5 \tan 54^\circ}{3} = \frac{5\sqrt{3} + 5 \tan 54^\circ}{3}$ 截角體(紅色部分)周長=90 邊= $90 \times \frac{1}{3} = 30$ 截角體表面積 $= 12 \text{ 個正五邊形 } 20 \text{ 個正六邊形}$ $= 12 \times \frac{5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \tan 54^\circ}{4} + 20 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$ $= 15 \times \frac{1}{9} \tan 54^\circ + 30 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{9}$ $= \frac{5 \tan 54^\circ + 10\sqrt{3}}{3}$

3. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{2}$ (即 $r=\frac{1}{2}$)



截去的角錐(藍色部分)的總周長

$$= 12 \text{ 個五角錐} = 12 \times \left(10 \times \frac{1}{2}\right) = 60$$

截去的角錐的總表面積

$$\begin{aligned} &= 12 \times [5 \text{ 個正 } \triangle + 1 \text{ 個正五邊形}] \\ &= 12 \times \left[5 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \tan 54^\circ}{4} \right] \\ &= 12 \times \left[\frac{5\sqrt{3}}{16} + \frac{5 \tan 54^\circ}{16} \right] \\ &= \frac{15\sqrt{3} + 15 \tan 54^\circ}{4} \end{aligned}$$

截角體(紅色部分)周長 = 12 個正五邊形

$$= 12 \times 5 \times \frac{1}{2} = 30$$

截角體表面積 = 12 個正五邊形 + 20 個正 $\triangle$

$$\begin{aligned} &= 12 \times \frac{5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \tan 54^\circ}{4} + 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{15 \tan 54^\circ}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{5\sqrt{3} + 15 \tan 54^\circ}{4} \end{aligned}$$

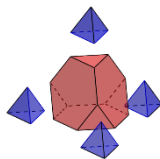
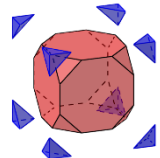
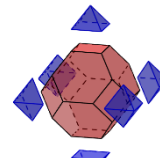
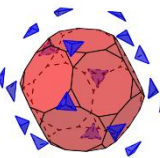
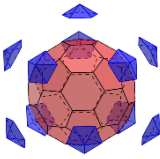
(本表由作者一、作者二、作者三共同整理與製作)

伍、研究結果

一、我們將針對各正多面體各頂點截去全等角錐的計算結果統整於下方，表六列出當截角比 $r=\frac{1}{3}$ 時截下的角錐形狀、截去的角錐的總周長及總表面積，並計算出其總周長與原先($r=0$ 時)的正多面體周長的比值以及其總表面積與原先($r=0$ 時)的正多面體表面積的比值。表七則列出 $r=\frac{1}{3}$ 時的截角體形狀、截角體總周長及總表面積，並計算出截角體總周長與原先($r=0$ 時)的正多面體周長的比值以及截角體總表面積與原先($r=0$ 時)的正多面體表面積的比值。

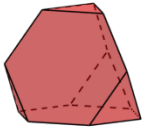
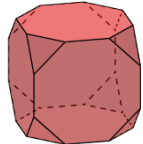
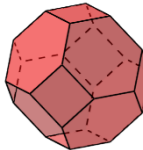
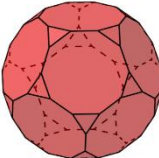
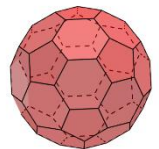
以正四面體為例，當截角比 $r=\frac{1}{3}$ 時，截去的角錐的總周長為 8，而原先的正四面體周長為 6，因此比值為 $\frac{4}{3}$ ；而截角比 $r=\frac{1}{2}$ 時，截角體的周長為 6，原先的正四面體周長為 6，因此比值為 1。

表六 各正多面體以 $r=1/3$ 進行截角，截去的角錐部分彙整

	截角部分 (藍色部分)	截角部分 圖形	總周長	總表面積	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 周長比值	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 表面積比值
正四面體		正三角錐	8	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\frac{4}{3}$ $\div 1.33$	$\frac{4}{9}$ $\div 0.44$
正六面體		正三角錐	$8 + 8\sqrt{2}$	$\frac{12 + 4\sqrt{3}}{9}$	$\frac{2 + 2\sqrt{2}}{3}$ $\div 1.60$	$\frac{6 + 2\sqrt{3}}{27}$ $\div 0.35$
正八面體		正四角錐	$\frac{64}{3}$	$\frac{8 + 8\sqrt{3}}{9}$	$\frac{16}{9}$ $\div 1.78$	$\frac{12 + 4\sqrt{3}}{27}$ $\div 0.70$
正十二面體		正三角錐	40	$\frac{20\sqrt{3}}{9}$	$\frac{4}{3}$ $\div 1.33$	$\frac{4\sqrt{3}}{27 \tan 54^\circ}$ $\div 0.18$
正二十面體		正五角錐	40	$\frac{5\sqrt{3} + 5 \tan 54^\circ}{3}$	$\frac{4}{3}$ $\div 1.33$	$\frac{3 + \sqrt{3} \tan 54^\circ}{9}$ $\div 0.59$

(本表由作者一、作者二、作者三共同整理與製作)

表七 各正多面體以 $r=1/3$ 進行截角，截角體彙整

	截角體 (紅色部分)	截角體圖形	總周長	總表面積	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 周長比值	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 表面積比值
正四面體		八面體	6	$\frac{7\sqrt{3}}{9}$	1	$\frac{7}{9}$ $\div 0.78$
正六面體		十四面體	$4 + 8\sqrt{2}$	$\frac{42 + 4\sqrt{3}}{9}$	$\frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}$ $\div 1.28$	$\frac{21 + 2\sqrt{3}}{27}$ $\div 0.91$
正八面體		十四面體	12	$\frac{8 + 12\sqrt{3}}{9}$	1	$\frac{18 + 4\sqrt{3}}{27}$ $\div 0.92$
正十二面體		三十二面體	30	$\frac{5\sqrt{3} + 30\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{9}$	1	$\frac{\sqrt{3} + 6\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{27 \tan 54^\circ}$ $\div 0.54$
正二十面體		三十二面體	30	$\frac{5 \tan 54^\circ + 10\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{6 + \sqrt{3} \tan 54^\circ}{9}$ $\div 0.93$

(本表由作者一、作者二、作者三共同整理與製作)

同理，表八列出當截角比 $r=\frac{1}{2}$ 時截下的角錐形狀、截去的角錐的總周長及總表面積等資訊。

表九則整理出 $r=\frac{1}{2}$ 時的截角體形狀、截角體總周長及總表面積等資訊。經由這些資訊我們可以看出：

- (一)正多面體按照特定的截角和截半方式，所得出的截角截半圖形都是正角錐，分別為正三角錐、正四角錐和正五角錐。
- (二)正多面體按照特定的截角和截半方式，所得出的截角截半體圖形都是對稱的多面體，分別為八面體、十四面體和三十二面體。其中較特殊的為正四面體，在進行截半後的圖形變為正八面體；正十二面體和正二十面體在進行截半後圖形皆為一樣的三十二面體。
- (三)從圖表整理分析出，正多面體在截角部分的周長，除了正六面體、正八面體和原圖周

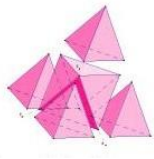
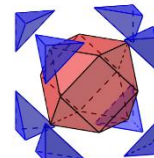
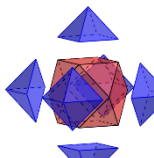
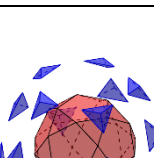
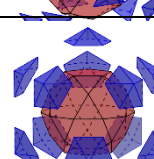
長比值超過 1.5 外，其餘四個多面體截角部分周長皆為原圖比值的 $\frac{4}{3}$ ；正多面體在截半部分的周長，除了正八面體和原圖周長比值為1外，正四面體和正二十二面體截半部分周長比值皆為原圖的 2 倍。

(四)正多面體在進行截角後圖形，除了正六面體截角體與原圖周長比值會大於 1 外，其餘面體皆和原圖的周長比值皆為 1；正多面體在進行截半後圖形，除了正四、十二面體與原圖的周長比值為 1 外，其餘面體與原圖周長比值皆大於 1。

(五)正多面體在進行截角部分和截角體的表面積，皆與原圖表面積的比值小於 1，其中發現又以正十二面體與原圖的比值為最小；正多面體在截半部分的表面積，除了正八、十二面體與原圖表面積比值小於 1 外，其餘皆大於 1；正多面體在截半體的表面積，除了正十二面體與原圖表面積大於 1 外，其餘皆小於 1。

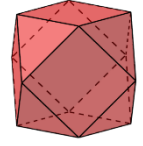
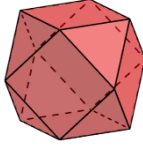
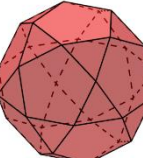
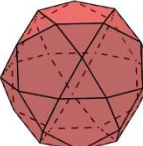
(六)正十二面體和正二十面體在進行截半後，雖然截半體圖形一樣皆為三十二面體，但其周長和表面積卻不相等。

表八 各正多面體以 $r=1/2$ 進行截半，截去的角錐部分彙整

	截角部分 (藍色部分)	截半部分 圖形	總周長	總表面積	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 周長比值	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 表面積比值
正四面體		正三角錐	12	$\sqrt{3}$	2	1
正六面體		正三角錐	$12 + 12\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{6}}{2}$	$1 + \sqrt{2}$ $\div 2.41$	$\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{6}}{12}$ $\div 1.51$
正八面體		正四角錐	12	$\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1 + \sqrt{3}}{4}$ $\div 0.68$
正十二面體		正三角錐	$45 + 15\sqrt{5}$	$\frac{45\sqrt{3} + 5\sqrt{15}}{8}$	$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ $\div 2.62$	$\frac{9\sqrt{3} + \sqrt{15}}{24 \tan 54^\circ}$ $\div 0.59$
正二十面體		正五角錐	60	$\frac{15\sqrt{3} + 15 \tan 54^\circ}{4}$	2	$\frac{3 + \sqrt{3} \tan 54^\circ}{4}$ $\div 1.35$

(本表由作者一、作者二、作者三共同整理與製作)

表九 各正多面體以 $r=1/2$ 進行截半，截半體彙整

	截角體 (紅色部分)	截半體圖形	總周長	總表面積	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 周長比值	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 表面積比值
正四面體		正八面體	6	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$ $\div 0.50$
正六面體		十四面體	$12\sqrt{2}$	$3 + \sqrt{3}$	$\sqrt{2}$ $\div 1.41$	$\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$ $\div 0.79$
正八面體		十四面體	24	$\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}$	2	$\frac{1 + \sqrt{3}}{4}$ $\div 0.68$
正十二面體		三十二面體	$15 + 15\sqrt{5}$	$\frac{(15 + 5\sqrt{5})(3\tan 54^\circ + \sqrt{3})^2}{8}$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ $\div 1.62$	$\frac{(3 + \sqrt{5})(3\tan 54^\circ + \sqrt{3})}{24\tan 54^\circ}$ $\div 1.13$
正二十面體		三十二面體	30	$\frac{5\sqrt{3} + 15\tan 54^\circ}{4}$	1	$\frac{1 + \sqrt{3}\tan 54^\circ}{4}$ $\div 0.85$

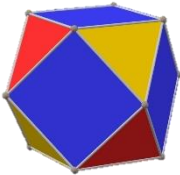
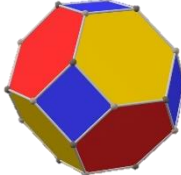
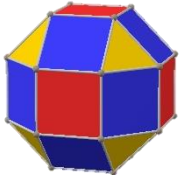
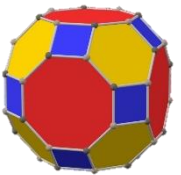
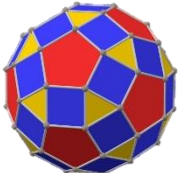
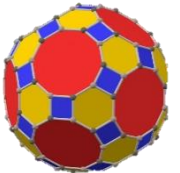
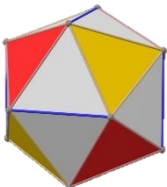
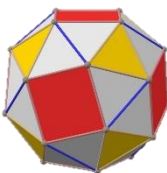
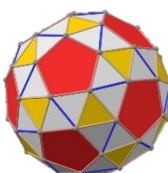
(本表由作者一、作者二、作者三共同整理與製作)

陸、未來展望

本研究正多面體的截角和截半主要限縮在各邊之 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$ ，未來將可進一步探討截邊長為 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{6}$ 之周長和面積之變化關係……另外本研究主要在探討截角截半之周長和面積前後變化，未來還可深入探討體積前後之變化關係。

此外，正多面體還可進一步探討進行截半變換和扭稜之周長面積的前後變化，例如：截半立方體是透過截半變換構造而成的多面體，也可以由對偶——正八面體透過截半變換構成，因此也稱為截半八面體；扭稜四面體是一種二十面體，可以視為四面體經過扭稜變換所形成的立體，在扭稜的過程中會形成 3 種面，一種是原始四面體的面、另一種是來自原像頂點圖的面、還有一種是扭稜變換過程中所形成的面。以下分別舉圖列出：

表十 延伸正多面體可能截半和扭稜變化

正多面體進行 <u>截半變換</u>			
小斜方截半四面體	大斜方截半四面體	小斜方截半立方體	大斜方截半立方體
			
小斜方截半二十面體		大斜方截半二十面體	
			
正多面體進行 <u>扭稜</u>			
扭稜四面體	扭稜立方體*	扭稜十二面體	
			

(本表由作者一、作者二、作者三共同整理與製作)

柒、參考資料(文獻)及其他

- 【1】潘誠哲、楊宣城、潘奕安、潘姿妤與潘玥彤(2017 年)。成雙成對多面體。
中華民國第 57 屆中小學科學展覽會。
- 【2】游蕙綺、翁珮慈、吳茂萁與郭怡姝(2010 年)。“拼”給你看~一面二體三尤拉。
中華民國第 50 屆中小學科學展覽會。
- 【3】王渝溥(2005 年)。化『錐』為『球』。中華民國第 45 屆中小學科學展覽會。
- 【4】林保平(2018)。多面體的生成及動態模型製作在數學算板上的實踐（下）。
科學教育月刊，413，10-22。
- 【5】動態幾何。黃俊晏(2011)。取自 <https://m98.nthu.edu.tw/~s9821103/dg11/index.htm>
- 【6】Geogebra 阿基米德的異想世界。HCKAO。取自 <https://www.geogebra.org/u/hckao>
- 【7】Geogebra 阿基米德固體準則多面體。ktr。取自 <https://www.geogebra.org/m/ATspfAFJ>
- 【8】Geogebra 切割柏拉圖多面體。薛鈞聰。取自 <https://www.geogebra.org/m/xrnKXnaS>

【評語】 030417

這項研究以正多面體（柏拉圖立體）為主題，深入探討了其在進行截角（truncation）與截半（rectification）操作後所產生的立體變化。研究者運用 GeoGebra 軟體進行了模型建立與模擬，直觀地呈現了各種變化後的立體結構，並進一步計算了其周長與表面積，分析了變化前後的比例關係與幾何特性。

作品海報

正多面體截角截半

摘要

此研究探討正多面體(柏拉圖立體)再進行截角(truncation)和截半(rectified)的情況下，觀察其所形成的截角截半後的圖形變化，即其中一種阿基米德多面體的生成方式，並利用Geogebra電腦軟體模擬繪製，藉此來協助我們觀察並計算截角截半後的圖形周長及表面積，並分析其前後圖形比例之關係。

壹、研究動機

在國小時我們學習過多面體在進行表面積計算時，是將其一面之表面積算出後再乘以其表面數而得；在計算周長時，則是把一邊長乘上所有的邊長數而得；在體積方面則沒有演算過和推導其公式。

在課堂上老師拿出了正多面體讓我們探討其圖形組成，並且詢問我們如果五個正多面體在進行截角後會變成什麼樣的圖形呢?這也引發了我們對於多面體進行截角後的立體圖形產生興趣，上網找尋工具協助我們探討在正多面體上進行截角後的圖形，讓我們想要繼續探索：當對正多面體進行各角的截角後：1. 截角下來的「角」會是怎樣的形狀及其具有甚麼性質？2. 截角截半後「留下來的圖形」的周長、表面積會有怎麼樣的變化？在此研究報告中，我們將研究對象設定在正多面體的邊長為 1，並且利用Geogebra電腦軟體來繪製截角和截半圖形，以協助我們觀察和完成計算截角截半後之周長和表面積。

貳、研究目的

- 一、分析及理解正多面體的各種截角截半後的變化和圖形。
- 二、運用Geogebra電腦軟體觀察正多面體進行截角截後的圖形變化。
- 三、算出正多面體採截角截半時所形成的各種截角形狀及其分析前後周長及表面積之改變。

參、研究器材與設備

電腦、GeoGebra軟體、紙、筆

肆、研究過程

- 一、基本定義：
- (一)、正多面體：

本研究中進行截角所使用的正多面體，為各面都是全等的正多邊形且每一個頂點所接的面數都是一樣的凸多面體，即柏拉圖立體(Platonic Solids)，符合這種特性的立體總共有5種，分別為正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體。在本研究中，將各正多面體的邊長都定義為a。

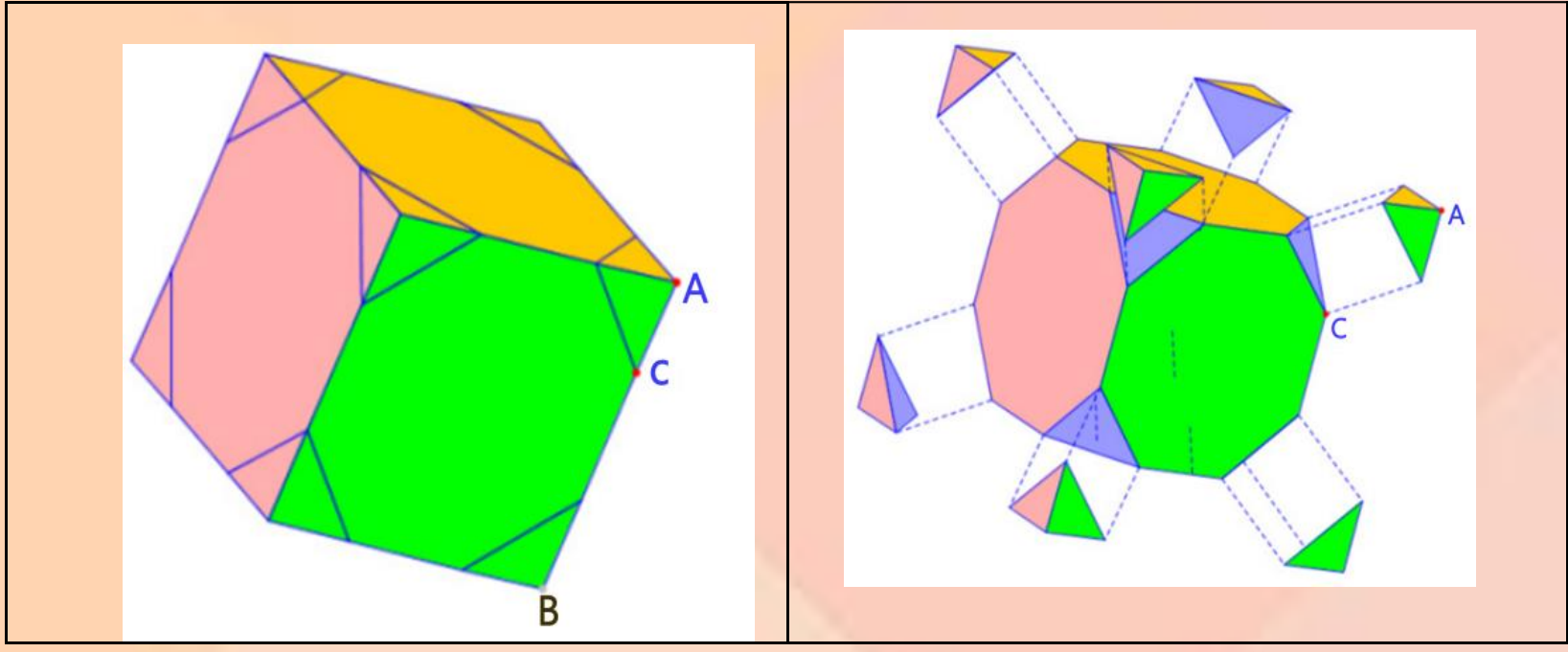
- (二)、截角限制條件：

本研究中所指的截角，指的是將多面體的各頂點角截去全等的角錐，在此將截角後得到的多面體稱為截角體。圖一中以正方體做為示意圖，C點為多面體AB邊上的一點，AC表示截去的角錐稜線長，因此AC長度不得超過AB的一半。

令 $r=(AC)/(AB)$ ，稱為截角比，則 $r\in[0,1/2]$ 。當 $r=0$ 時，截角體就是多面體本身(以圖一為例，即正方體本身)；當 $r=1/2$ 時，稱為截半(rectified)截角體。如圖一所示，移動C點可改變截角比。在此研究中，我們定義各正多面體的邊長都為

1，並將 r 限縮在 1/3 及 1/2，即AC=截去的角錐稜線長為 1/3 及 1/2 時，推導各正多面體截去截角後的截角體周長及表面積公式。以圖一的右圖為例，當正六面體的八個頂點都截去稜線長為 1/3 的角錐後，中間剩下來的十四面體即為截角體。

圖一 正六面體截角示意圖



(本表由作者1整理與製作)

- 二、進行步驟：

利用GeoGebra軟體中可對正多面體操作截角的工具，協助我們進行觀察，將正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體，都以前述的條件得到截面，輔助我們計算正多面體邊長為1，而截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{3}$ 及 $\frac{1}{2}$ 時：(1)截去的角錐的總周長及總表面積 (2)截角後的截角體的周長及表面積。

- 三、探討過程：

在各正多面體的各頂點角截去全等的角錐，探討截下的角錐及截角體的周長及表面積：在這個部分按照基本定義中所列的截角限制條件，以GeoGebra軟體輔助我們觀察截角後的形狀，並計算出周長及面積，以下以正四面體為例，將圖示及計算過程列於表一中：

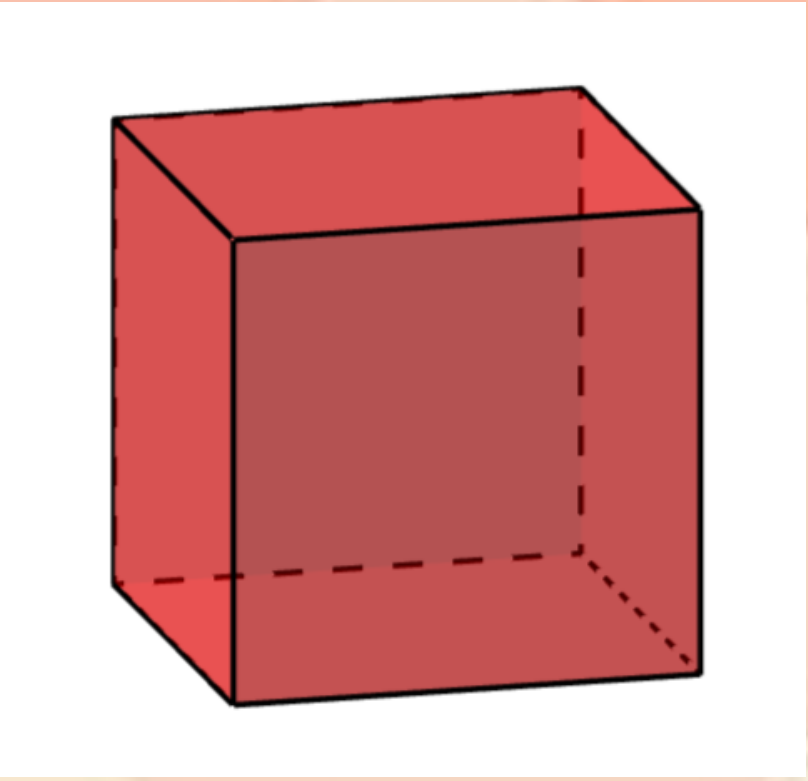
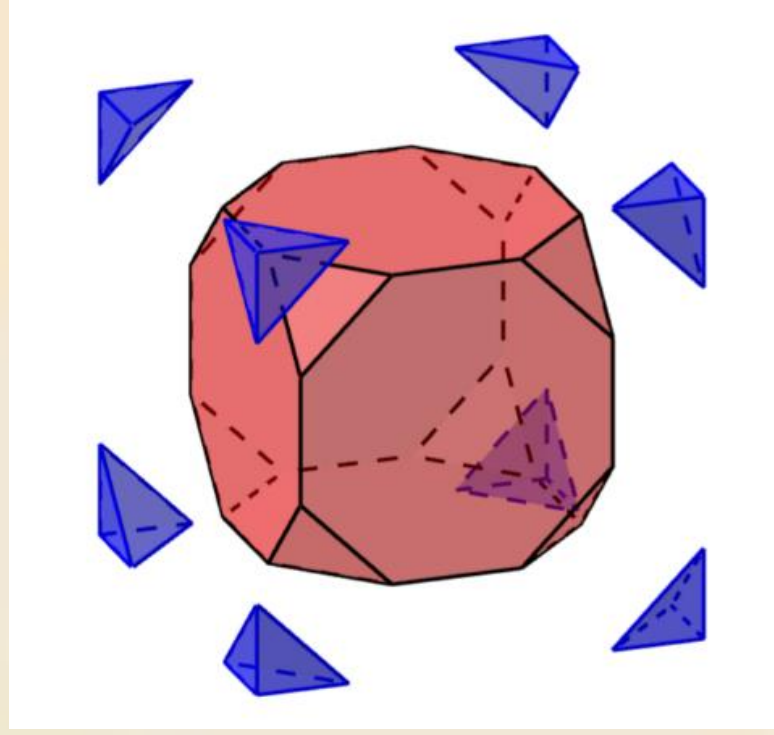
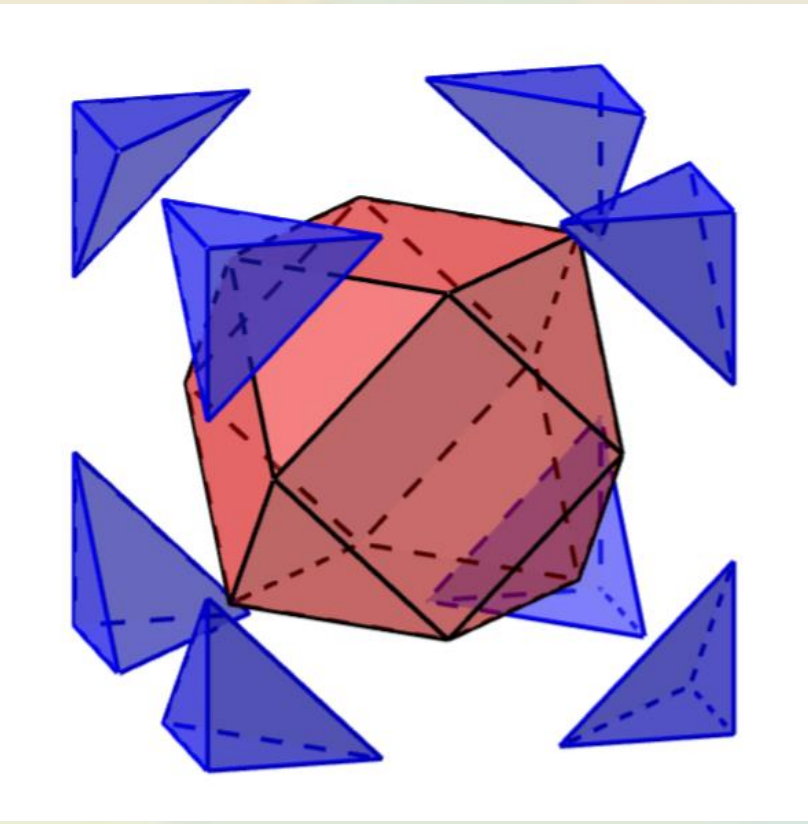
●正四面體

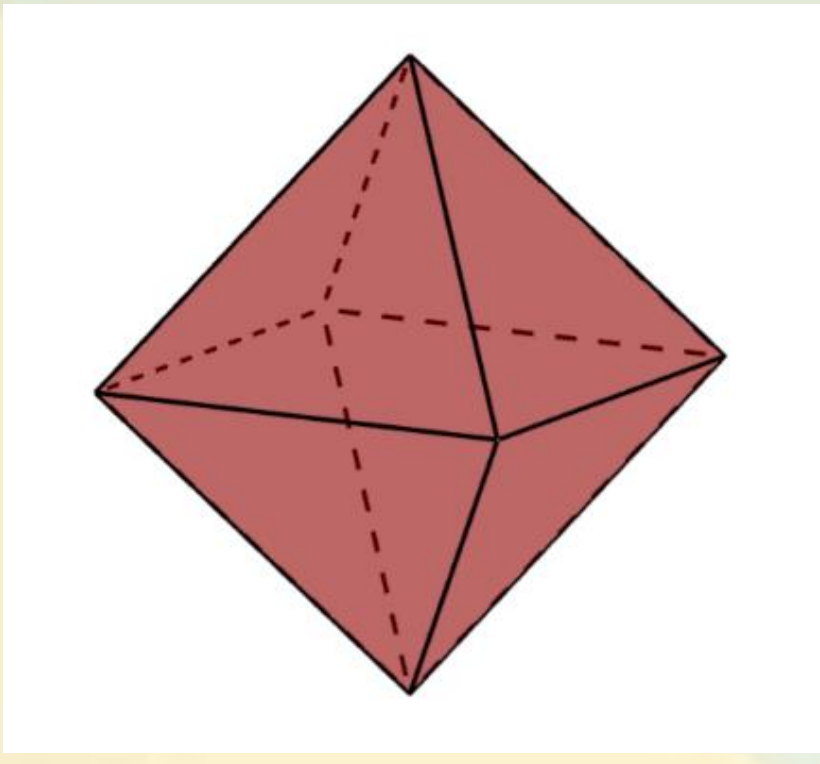
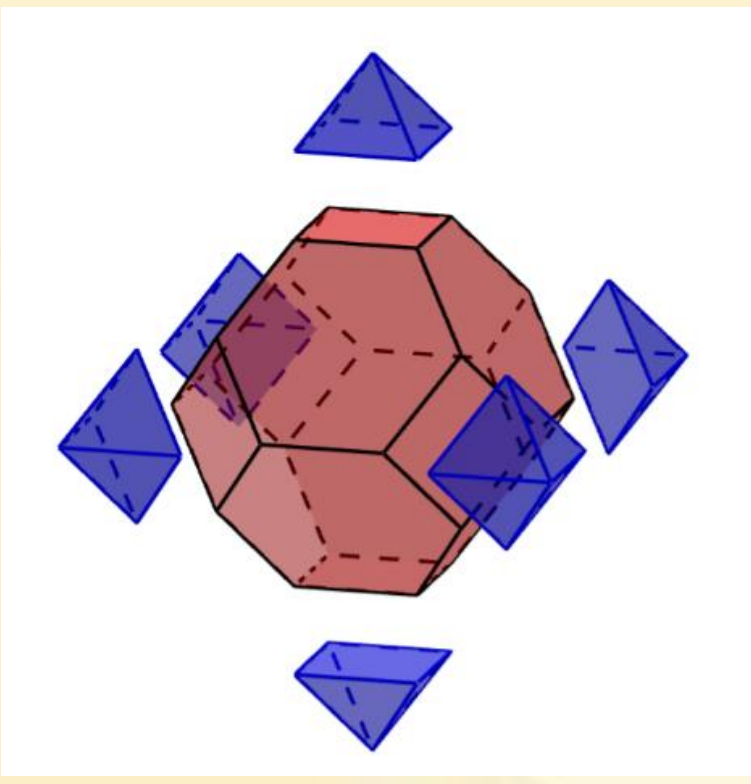
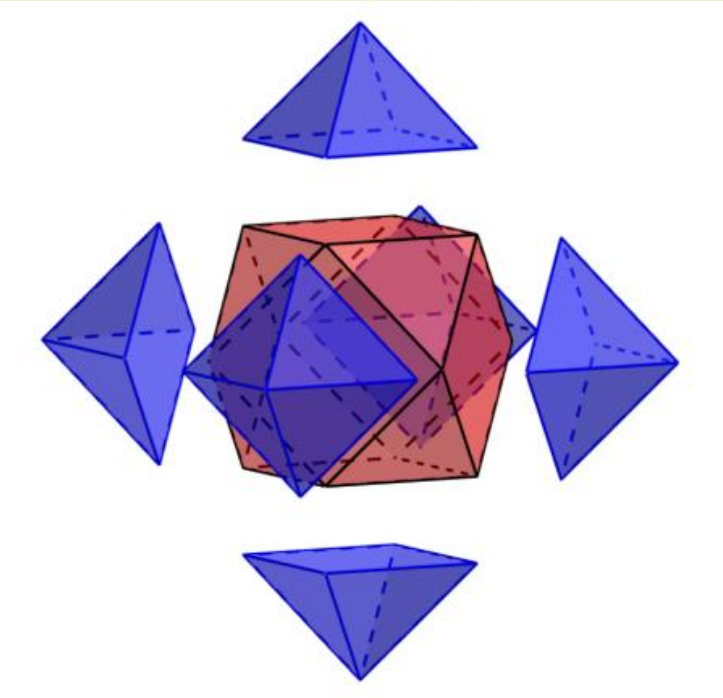
- 繪出邊長為1的正四面體，當 $r=0$ 時，此時還未有截下的角錐，因此截去的角錐的總周長及總表面積都為0；此時截角體即四面體本身，則截角體周長=6，截角體表面積為 $\sqrt{3}$ 。
- 以 $r = \frac{1}{3}$ 在4個頂點截去全等的角錐，此時截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{3}$ 。此時被截下的4個全等的角錐的總周長為8，且總表面積為 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ 。截角體的總周長為6，而總表面積為 $\frac{7\sqrt{3}}{9}$ 。
- 以 $r = \frac{1}{2}$ 在4個頂點截去全等的角錐，此時截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{2}$ 。此時被截下的4個全等的角錐的總周長為12，且總表面積為 $\sqrt{3}$ 。此時的截角體為截半(rectified)截角體，其總周長為6，總表面積為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

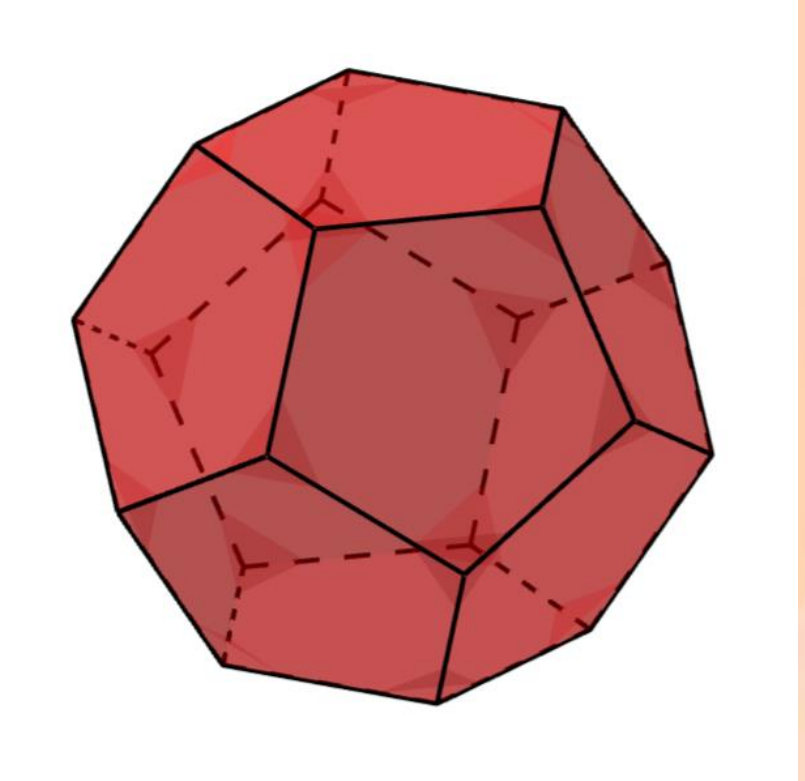
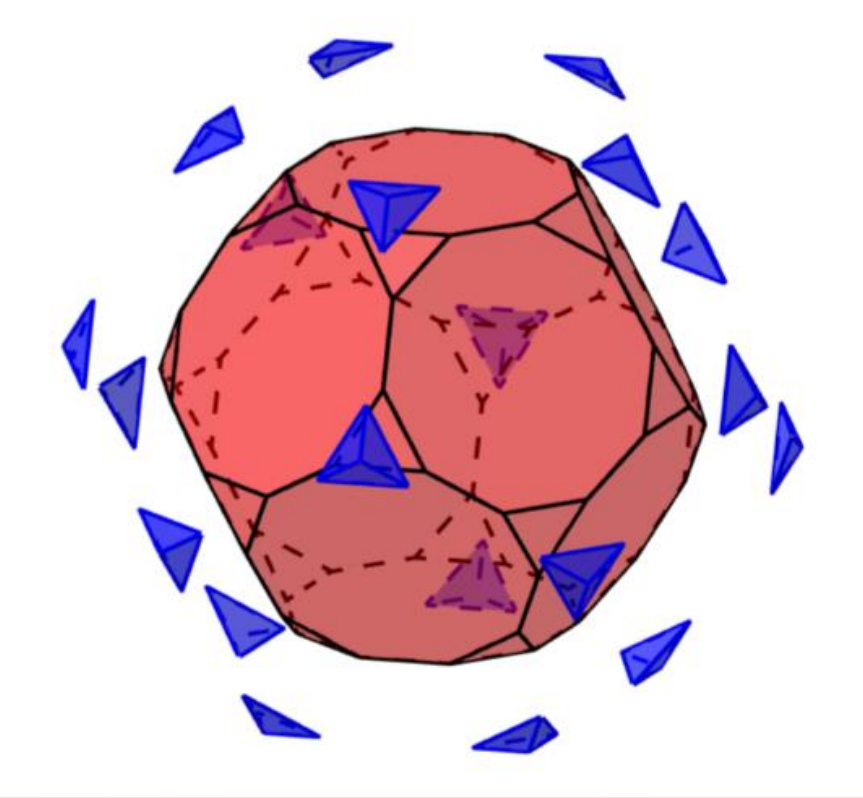
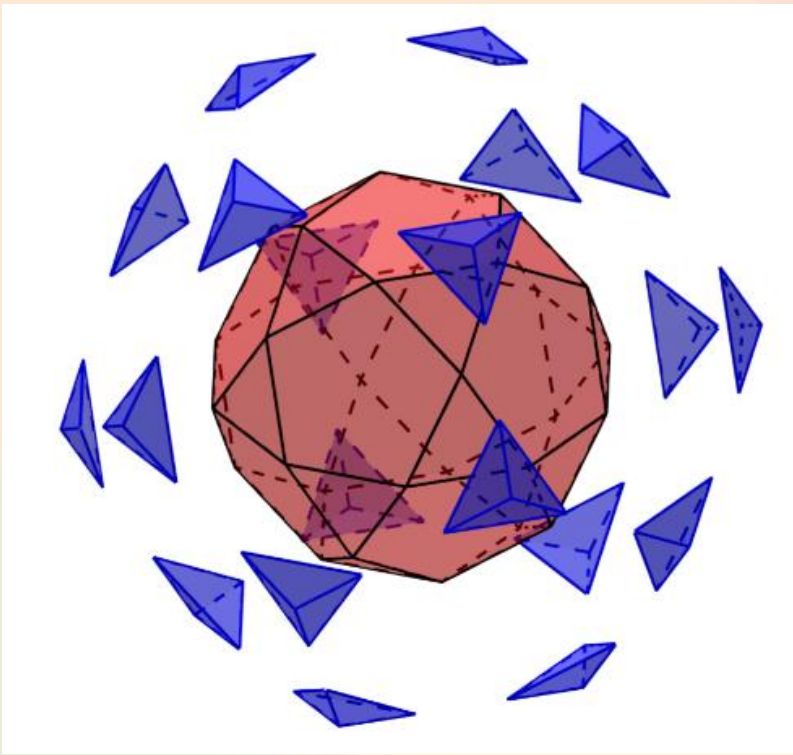
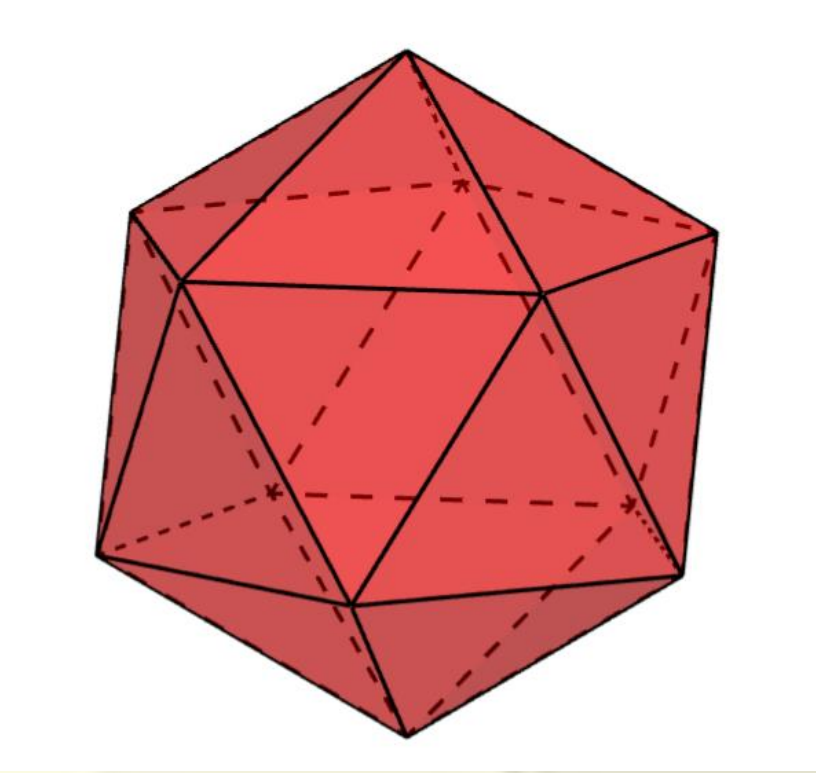
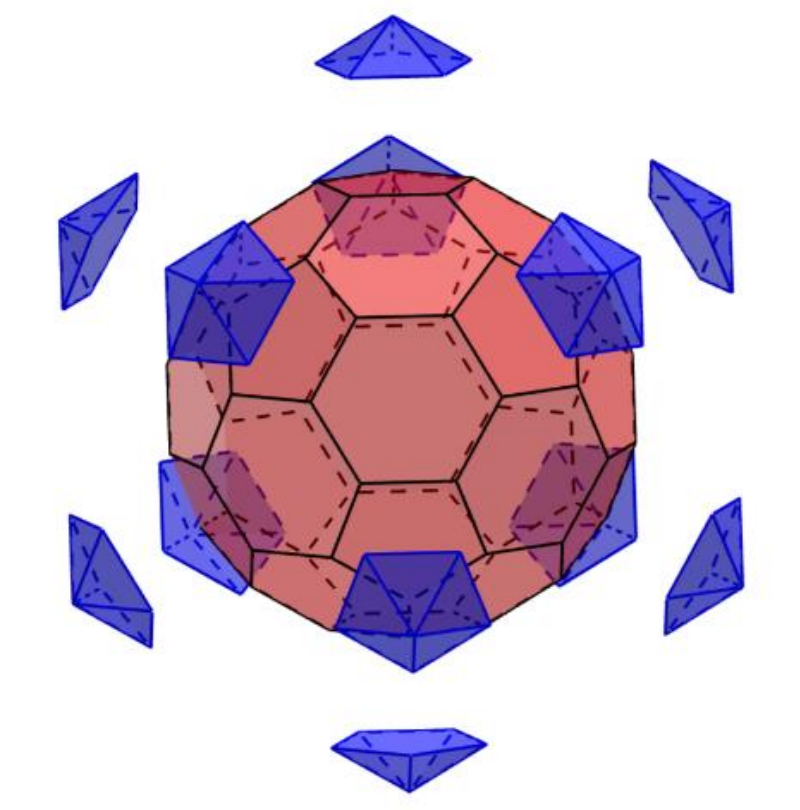
接著我們將正六面體、、正八面體、正十二面體及正二十面體截角時的圖示及計算過程依序列於表一~表五中：

1. 截角前($r=0$)	
	截去的角錐的總周長 = 0 截去的角錐的總表面積 = 0 截角體(正四面體本身)周長= 6 截角體表面積= 4 個正 $\triangle = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \times 4 = \sqrt{3}$
2. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{3}$ (即 $r=\frac{1}{3}$)	
	截去的角錐(藍色部分)的總周長=4 個正三角錐的總周長=4x6x$\frac{1}{3}$=8 截去的角錐的總表面積=16 個正 $\triangle$ = $16 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times r^2$ = $16 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times r^2 = 16\sqrt{3}r^2$ 截角體(紅色部分)周長= $18 \times \frac{1}{3} = 6$ 截角體表面積=4 個正 $\triangle$ + 4 個正六邊形 = 28 個正 $\triangle$ = $28 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$ = $28 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9} = \frac{7\sqrt{3}}{9}$
3. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{2}$ (即 $r=\frac{1}{2}$)	
	截去的角錐(藍色部分)的總周長= 4個正三角錐的總周長=4x 6 x $\frac{1}{2} = 12$ 截去的角錐的總表面積= 16個正 $\triangle = 16 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \sqrt{3}$ 截角體 (紅色部分) 周長 = $12 \times \frac{1}{2} = 6$ 截角體表面積= $8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

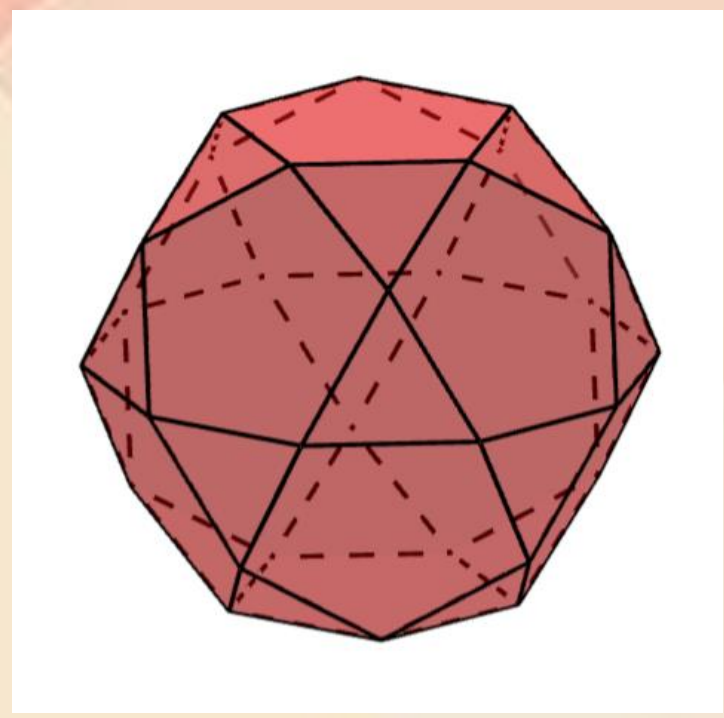
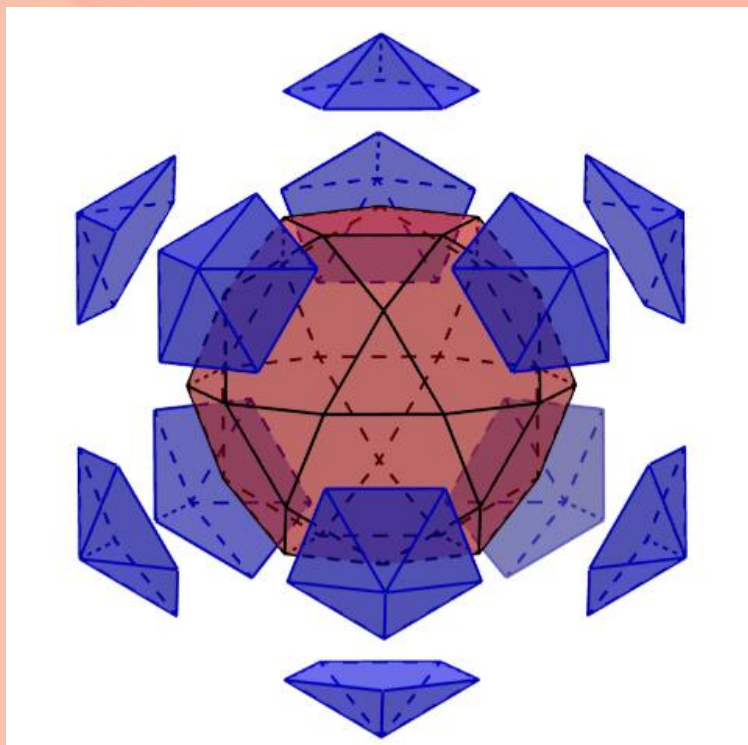
(本表由作者1、作者2、作者3共同整理與製作)

表二 正六面體截去的角錐及截角體的總周長及總表面積計算	
1. 截角前(r=0)	 截去的角錐的總周長 =0 截去的角錐的總表面積 =0 截角體(正六面體本身)周長= 12 截角體表面積=6個正方形 =6× 1² = 6
2. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{3}$ (即 r= $\frac{1}{3}$)	 截去的角錐(藍色部分)的總周長=8 個四面體的總周長= 8× (3 個側邊長+ 3 個底邊長) = 8× $\left(3 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ = 8+ 8√2 截去的角錐的總表面積 =8× $\left[\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2} \times 3 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\right]$ =$\frac{12+4\sqrt{3}}{9}$ 截角體(紅色部分)周長= 8個 △ +12 × $\frac{1}{3}$ = 8× 3 × $\frac{\sqrt{2}}{3}$ + 4 = 4+ 8√2 截角體表面積= 8個△+6 個八邊形 = $\frac{4\sqrt{3}}{9} + 2 + \frac{8}{3} = \frac{42+4\sqrt{3}}{9}$
1. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{2}$ (即 r= $\frac{1}{2}$)	 截去的角錐(藍色部分)的總周長 = 8 個正四面體 =8× $\left[\frac{1}{2} \times 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 3\right]$ =8× $\left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ = 12+ 12√2 = 12+ 12√2 截去的角錐的總表面積 =8× (3 個等腰三角形+ 1 個正三角形) = 8× $\left[\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$ = 3+ √3 截角體(紅色部分)周長=6 個正方形 = 24 邊 = 24 × $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 12√2 截角體表面積=6 個正方形+8 個正 △ = 6 × $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ + 8 × $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ = 3+ √3 (本表由作者1、作者2、作者3共同整理與製作)

表三 正八面體截去的角錐及截角體的總周長及總表面積計算	
1. 截角前(r=0)	 截去的角錐的總周長 =0 截去的角錐的總表面積 =0 截角體(正八面體本身)周長= 12 截角體表面積= 8 × 正 △= 8 × $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2$ = 2√3
1. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{3}$ (即 r= $\frac{1}{3}$)	 截去的角錐(藍色部分)的總周長= 64 個邊 = 64 × $\frac{1}{3}$ = $\frac{64}{3}$ 截去的角錐的總表面積= 8 × (1 × 正方形 + 4 × 正 △) = 8 × $\left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$ = 8 × $\left[\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right]$ = $\frac{8+8\sqrt{3}}{9}$ 截角體(紅色部分)周長= 6 正方形 + 4 + 4 + 4 = 6 × 4 + 12 = 36 個邊 = 36 × $\frac{1}{3}$ = 12 截角體表面積= 8 正方形 + 8 正六邊形 = 8 × $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \left[8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$ = $\frac{8}{9} + \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{8+12\sqrt{3}}{9}$
2. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{2}$ (即 r= $\frac{1}{2}$)	 截去的角錐(藍色部分)的總周長 = 6 × 8 × $\frac{1}{2}$ = 24 截去的角錐的總表面積 = 6 正方形 + 24 正三角形 = 4 × 6 × $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ = 6 × $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 + \frac{3}{2} = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$ 截角體(紅色部分)周長= 6 × 8 邊 = 48 邊 = 48 × $\frac{1}{2}$ = 24 截角體表面積= 6[4 正三角形 + 1 正方形] = 6 $\left[4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right]$ = $\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$ (本表由作者1、作者2、作者3共同整理與製作)

表四 正十二面體截去的角錐及截角體的總周長及總表面積計算	
1. 截角前(r=0)	 截去的角錐的總周長 =0 截去的角錐的總表面積 =0 截角體(正十二面體本身)周長 = 30 邊 = 30 × 1 = 30 截角體表面積= 12 × 正五邊形 = 12 × $\frac{5 \tan 54^\circ}{4}$ = 15 tan 54°
2. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{3}$ (即 r= $\frac{1}{3}$)	 截去的角錐(藍色部分)的總周長= 20 個角 = 20 × 6 × $\frac{1}{3}$ = 20 × 2 = 40 截去的角錐的總表面積= 20(正四面體) = 20 × $\left[4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$ = 20 × 4 × $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9} = \frac{20\sqrt{3}}{9}$ 截角體(紅色部分)周長=90 × $\frac{1}{3}$ = 30 截角體表面積= 20 正 △ +12 正十邊形面積 = $\left[20 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] + \left\{12 \times \left[\frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sqrt{5+2\sqrt{5}}\right]\right\}$ = $\frac{5\sqrt{3}+30\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{9}$
1. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{2}$ (即 r= $\frac{1}{2}$)	 截去的角錐(藍色部分)的總周長 =20× $\left(3 \times \frac{1+\sqrt{5}}{4} + 3 \times \frac{1}{2}\right)$ = 60 × $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ + 60 × $\frac{1}{2}$ = 45+15√5 = 45+ 15√5 截去的角錐的總表面積 = 20 × $\left(3 \text{ 個側邊正 } \triangle \times \frac{1+\sqrt{5}}{4} + 1 \text{ 個底邊正 } \triangle\right)$ = 20 $\left[3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\right]$ = 20 $\left[3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{3+\sqrt{5}}{8}\right]$ = $\frac{15\sqrt{3}}{4} + \frac{15\sqrt{3}+5\sqrt{15}}{8} = \frac{45\sqrt{3}+5\sqrt{15}}{8}$ 截角體(紅色部分)周長=60×邊長 = 60 × $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ = (15+ 15√5) 截角體表面積=12× $\frac{5 \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 \tan 54^\circ}{4}$ + 20× $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$ = 15 × $\frac{6+2\sqrt{5}}{16} \times \tan 54^\circ + 5\sqrt{3} \times \frac{6+2\sqrt{5}}{16}$ = $\frac{(90+30\sqrt{5}) \tan 54^\circ + 30\sqrt{3} + 10\sqrt{15}}{16}$ = $\frac{(15+5\sqrt{5})(3 \tan 54^\circ + \sqrt{3})}{8}$ (本表由作者1、作者2、作者3共同整理與製作)
表五 正二十面體截去的角錐及截角體的總周長及總表面積計算	
1. 截角前(r=0)	 截去的角錐的總周長 =0 截去的角錐的總表面積 =0 截角體(正二十面體本身)周長= 30 截角體表面積=20 個正△= 20 × $\frac{\sqrt{3}}{4}$ = 5√3
2. 截去的角錐稜線長為 $\frac{1}{3}$ (即 r= $\frac{1}{3}$)	 截去的角錐(藍色部分)的總周長 = 12 × $\left(10 \times \frac{1}{3}\right)$ = 40 截去的角錐的總表面積 = 12× (5 個正 △ +1 個正五邊形) = 12 × $\left[5 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \tan 54^\circ}{4}\right]$ = 12 × $\left[\frac{5\sqrt{3}}{36} + \frac{45 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \tan 54^\circ}{36}\right]$ = $\frac{5\sqrt{3}+5 \tan 54^\circ}{3} = \frac{5\sqrt{3}+5 \tan 54^\circ}{3}$ 截角體(紅色部分)周長=90 邊= 90 × $\frac{1}{3}$ = 30 截角體表面積 =12個正五邊形 20 個正六邊形 = 12 × $\frac{5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \tan 54^\circ}{4}$ + 20 × 6 × $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$ = 15 × $\frac{1}{9} \tan 54^\circ + 30 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{9}$ = $\frac{5 \tan 54^\circ + 10\sqrt{3}}{3}$ (本表由作者1、作者2、作者3共同整理與製作)

1. 截去的角錐棱線長為 $\frac{1}{2}$ (即 $r=\frac{1}{2}$)



截去的角錐(藍色部分)的總周長
 $= 12 \text{ 個五角錐} = 12 \times \left(10 \times \frac{1}{2}\right) = 60$
截去的角錐的總表面積
 $= 12 \times \left[5 \text{ 個正 } \triangle + 1 \text{ 個正五邊形} \right]$
 $= 12 \times \left[5 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \tan 54^\circ}{4}\right]$
 $= \frac{15\sqrt{3} + 15 \tan 54^\circ}{4}$
截角體(紅色部分)周長 $= 12 \text{ 個正五邊形}$
 $= 12 \times 5 \times \frac{1}{2} = 30$
截角體表面積 $= 12 \text{ 個正五邊形} + 20 \text{ 個正 } \triangle$
 $= 12 \times \frac{5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \tan 54^\circ}{4} + 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$
 $= \frac{5\sqrt{3} + 15 \tan 54^\circ}{4}$

(本表由作者1、作者2、作者3共同整理與製作)

伍、研究結果

我們將針對各正多面體的各頂點截去全等角錐的計算結果統整於下方，表六列出當截角比 $r=1/3$ 時截下的角錐形狀、截去的角錐的總周長及總表面積，並計算出其總周長與原先($r=0$ 時)的正多面體周長的比值以及其總表面積與原先($r=0$ 時)的正多面體表面積的比值。表七則列出 $r=1/3$ 時的截角體形狀、截角體總周長及總表面積，並計算出截角體總周長與原先($r=0$ 時)的正多面體周長的比值以及截角體總表面積與原先($r=0$ 時)的正多面體表面積的比值。

以正四面體為例，當截角比 $r=1/3$ 時，截去的角錐的總周長為8，而原先的正四面體周長為6，因此比值為 $4/3$ ；而截角比 $r=1/2$ 時，截角體的周長為6，原先的正四面體周長為6，因此比值為1。

表六 各正多面體以 $r=1/3$ 進行截角，截去的角錐部分彙整

	截角部分 (藍色部分)	截角部分 圖形	總周長	總表面積	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 周長比值	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 表面積比值
正四面體		正三角錐	8	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\frac{4}{3}$ $\div 1.33$	$\frac{4}{9}$ $\div 0.44$
正六面體		正三角錐	$8 + 8\sqrt{2}$	$\frac{12 + 4\sqrt{3}}{9}$	$\frac{2 + 2\sqrt{2}}{3}$ $\div 1.60$	$\frac{6 + 2\sqrt{3}}{27}$ $\div 0.35$
正八面體		正四角錐	$\frac{64}{3}$	$\frac{8 + 8\sqrt{3}}{9}$	$\frac{16}{9}$ $\div 1.78$	$\frac{12 + 4\sqrt{3}}{27}$ $\div 0.70$
正十二面體		正三角錐	40	$\frac{20\sqrt{3}}{9}$	$\frac{4}{3}$ $\div 1.33$	$\frac{4\sqrt{3}}{27 \tan 54^\circ}$ $\div 0.18$
正二十面體		正五角錐	40	$\frac{5\sqrt{3} + 5 \tan 54^\circ}{3}$	$\frac{4}{3}$ $\div 1.33$	$\frac{3 + \sqrt{3} \tan 54^\circ}{9}$ $\div 0.59$

(本表由作者1、作者2、作者3共同整理與製作)

表七 各正多面體以 $r=1/3$ 進行截角，截角體彙整

	截角體 (紅色部分)	截角體圖形	總周長	總表面積	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 周長比值	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 表面積比值
正四面體		八面體	6	$\frac{7\sqrt{3}}{9}$	1	$\frac{7}{9}$ $\div 0.78$
正六面體		十四面體	$4 + 8\sqrt{2}$	$\frac{42 + 4\sqrt{3}}{9}$	$\frac{1 + 2\sqrt{2}}{3}$ $\div 1.28$	$\frac{21 + 2\sqrt{3}}{27}$ $\div 0.91$
正八面體		十四面體	12	$\frac{8 + 12\sqrt{3}}{9}$	1	$\frac{18 + 4\sqrt{3}}{27}$ $\div 0.92$
正十二面體		三十二面體	30	$\frac{5\sqrt{3} + 30\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{9}$	1	$\frac{\sqrt{3} + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{27 \tan 54^\circ}$ $\div 0.54$
正二十面體		三十二面體	30	$\frac{5 \tan 54^\circ + 10\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{6 + \sqrt{3} \tan 54^\circ}{9}$ $\div 0.93$

(本表由作者1、作者2、作者3共同整理與製作)

同理，表八列出當截角比 $r=1/2$ 時截下的角錐形狀、截去的角錐的總周長及總表面積等資訊。表九則整理出 $r=1/2$ 時的截角體形狀、截角體總周長及總表面積等資訊。經由這些資訊我們可以看出：

- (一)正多面體按照特定的截角和截半方式，所得出的截角截半圖形都是正角錐，分別為正三角錐、正四角錐和正五角錐。
- (二)正多面體按照特定的截角和截半方式，所得出的截角截半體圖形都是對稱的多面體，分別為八面體、十四面體和三十二面體。其中較特殊的為正四面體，在進行截半後的圖形變為正八面體；正十二面體和正二十面體在進行截半後圖形皆為一樣的三十二面體。
- (三)從圖表整理分析出，正多面體在截角部分的周長，除了正六面體、正八面體和原圖周長比值超過1.5外，其餘四個多面體截角部分周長皆為原圖比值的 $4/3$ ；正多面體在截半部分的周長，除了正八面體和原圖周長比值為1外，正四面體和正二十二面體截半部分周長比值皆為原圖的2倍。
- (四)正多面體在進行截角後圖形，除了正六面體截角體與原圖周長比值會大於1外，其餘面體皆和原圖的周長比值皆為1；正多面體在進行截半後圖形

除了正四、十二面體與原圖的周長比值為1外，其餘面體與原圖周長比值皆大於1。

(五)正多面體在進行截角部分和截角體的表面積，皆與原圖表面積的比值小於1，其中發現又以正十二面體與原圖的比值為最小；正多面體在截半部分的表面積，除了正八、十二面體與原圖表面積比值小於1外，其餘皆大於1；正多面體在截半體的表面積,除了正十二面體與原圖表面積大於1外，其餘皆小於1。

(六)正十二面體和正二十面體在進行截半後，雖然截半體圖形一樣皆為三十二面體，但其周長和表面積卻不相等。

表八 各正多面體以 $r=1/2$ 進行截半，截去的角錐部分彙整

	截角部分 (藍色部分)	截半部分 圖形	總周長	總表面積	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 周長比值	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 表面積比值
正四面體		正三角錐	12	$\sqrt{3}$	2	1
正六面體		正三角錐	$12 + 12\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{6}}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ $\div 2.41$	$\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{6}}{12}$ $\div 1.51$
正八面體		正四角錐	12	$\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1 + \sqrt{3}}{4}$ $\div 0.68$
正十二面體		正三角錐	$45 + 15\sqrt{5}$	$\frac{45\sqrt{3} + 5\sqrt{15}}{8}$	$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ $\div 2.62$	$\frac{9\sqrt{3} + \sqrt{15}}{24 \tan 54^\circ}$ $\div 0.59$
正二十面體		正五角錐	60	$\frac{15\sqrt{3} + 15 \tan 54^\circ}{4}$	2	$\frac{3 + \sqrt{3} \tan 54^\circ}{4}$ $\div 1.35$

(本表由作者1、作者2、作者3共同整理與製作)

表九 各正多面體以 $r=1/2$ 進行截半，截半體彙整

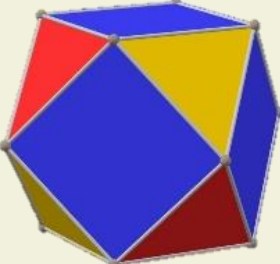
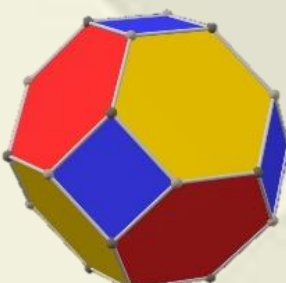
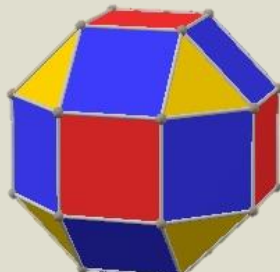
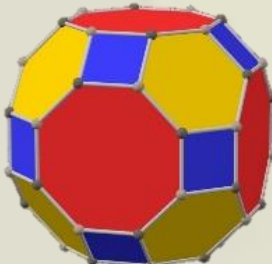
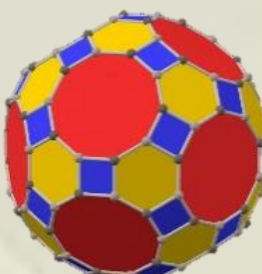
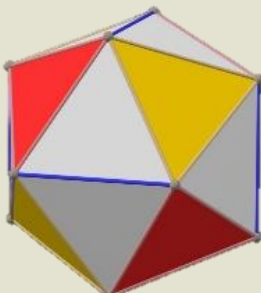
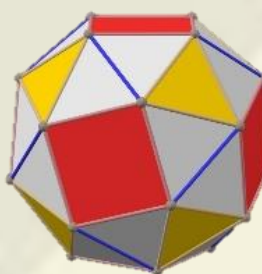
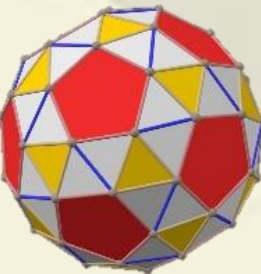
	截角體 (紅色部分)	截半體圖形	總周長	總表面積	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 周長比值	與 $r=0$ 時的 正 n 面體 表面積比值
正四面體		正八面體	6	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$ $\div 0.50$
正六面體		十四面體	$12\sqrt{2}$	$3 + \sqrt{3}$	$\sqrt{2}$ $\div 1.41$	$\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$ $\div 0.79$
正八面體		十四面體	24	$\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}$	2	$\frac{1 + \sqrt{3}}{4}$ $\div 0.68$
正十二面體		三十二面體	$15 + 15\sqrt{5}$	$\frac{(15 + 5\sqrt{5})(3 \tan 54^\circ + \sqrt{3})}{8}$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ $\div 1.62$	$\frac{(3 + \sqrt{5})(3 \tan 54^\circ + \sqrt{3})}{24 \tan 54^\circ}$ $\div 1.13$
正二十面體		三十二面體	30	$\frac{5\sqrt{3} + 15 \tan 54^\circ}{4}$	1	$\frac{1 + \sqrt{3} \tan 54^\circ}{4}$ $\div 0.85$

(本表由作者1、作者2、作者3共同整理與製作)

陸、未來展望

本研究正多面體的截角和截半主要限縮在各邊之 $1/3$ 和 $1/2$ ，未來將可進一步探討截邊長為 $1/4$ 、 $1/5$ 、 $1/6$ 之周長和面積之變化關係……。另外本研究主要在探討截角截半之周長和面積前後變化，未來還可深入探討體積前後之變化關係。此外，正多面體還可進一步探討進行截半變換和扭稜之周長面積的前後變化，例如：截半立方體是透過截半變換構造而成的多面體，也可以由對偶——正八面體透過截半變換構成，因此也稱為截半八面體；扭稜四面體是一種二十面體，可以視為四面體經過扭稜變換所形成的立體，在扭稜的過程中會形成3種面，一種是原始四面體的面、另一種是來自原像頂點圖的面、還有一種是扭稜變換過程中所形成的面。以下分別舉圖列出：

表十 延伸正多面體可能截半和扭稜變化

正多面體進行截半變換			
小斜方截半四面體	大斜方截半四面體	小斜方截半立方體	大斜方截半立方體
			
小斜方截半二十面體		大斜方截半二十面體	
			
正多面體進行扭稜			
扭稜四面體	扭稜立方體*	扭稜十二面體	
			

(本表由作者1、作者2、作者3共同整理與製作)

柒、參考文獻及其他

- 【1】潘誠哲、楊宣城、潘奕安、潘姿好與潘玥彤(2017年)。成雙成對多面體。中華民國第57屆中小學科學展覽會。
- 【2】游蕙綺、翁珮慈、吳茂其與郭怡玟(2010年)。“拼”給你看～一面二體三尤拉。中華民國第50屆中小學科學展覽會。
- 【3】王渝溥(2005年)。化『錐』為『球』。中華民國第45屆中小學科學展覽會。
- 【4】林保平(2018)。多面體的生成及動態模型製作在數學算板上的實踐（下）。科學教育月刊，413，10-22。
- 【5】動態幾何。黃俊晏(2011)。取自 <https://m98.nthu.edu.tw/~s9821103/dg11/index.htm>
- 【6】Geogebra 阿基米德的異想世界。HCKAO。取自 <https://www.geogebra.org/u/hckao>
- 【7】Geogebra 阿基米德固體準則多面體。ktr。取自 <https://www.geogebra.org/m/ATspfAFJ>
- 【8】Geogebra 切割柏拉圖多面體。薛鈞聰。取自 <https://www.geogebra.org/m/xrnKXnaS>